

# L'infini dans la métaphysique et la mathématique leibniziennes

Sébastien Poirier, *Université de Montréal*

*Ma métaphysique est toute  
mathématique pour ainsi dire  
ou le pourrait devenir*

Leibniz

## 1. Introduction

Le monde aristotélicien est un tout fini, bien ordonné, géocentrique : c'est le *Cosmos* des Grecs. Cette conception du monde fut également, dans ses grandes lignes, celle des médiévaux. Elle sera rejetée pour la première fois par Nicolas de Cues (1401-1464), sous motif métaphysique, mais elle ne commence à s'effriter sérieusement qu'avec la révolution copernicienne (qui sème le doute plus qu'autre chose), et est définitivement remplacée par une cosmologie infinitiste dans les travaux de Giordano Bruno (1548-1600)<sup>1</sup>. Au moment où Leibniz entame sa carrière, vers les 1660, la révolution philosophique et scientifique des XVI<sup>ème</sup> et XVII<sup>ème</sup> siècles, qui nous fit passer d'un monde clos à un univers infini, suivant la formule de Koyré, est déjà largement entamée. Mais contrairement à certains de ses contemporains, Leibniz ne se contente pas d'affirmer l'infinité ou, plus communément, l'indéfinité de l'univers. Il endosse plus spécialement l'infini actuel :

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée, et par conséquent la moindre parcelle doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes<sup>2</sup>.

Tenu inadmissible par la très grande majorité des ses prédécesseurs, l'infini actuel se trouve un avocat en Leibniz. Cela fait écho à l'opposition qui est faite, depuis Aristote, entre l'infini actuel d'un côté et l'infini potentiel de l'autre. En physique, Aristote affirmait qu'il ne peut exister de grandeurs infiniment grosses ou infiniment petites – il défendait un univers clos de grandeur finie – ; en mathématique, il refusait, plus spécifiquement, qu'une série infinie nous soit *actuellement* donnée, que nous puissions la concevoir comme complétée, au sens d'une totalité en acte<sup>3</sup>. Il n'existe pas, selon lui, d'infini actuel ; le mathématicien n'en n'aurait d'ailleurs jamais réellement besoin. En mathématique, le sens en lequel on peut dire d'une série qu'elle est infinie est le suivant : il nous sera toujours *possible* de progresser, d'y faire, à l'infini, un pas supplémentaire par addition ou division. La suite des entiers naturels (dans un cadre euclidien) est peut-être l'exemple le plus probant : le schème opératoire du  $n + 1$  n'a aucun principe limitatif. Mais c'est là un infini potentiel : la série infinie n'est jamais *réellement* complétée bien qu'il nous soit toujours possible d'y progresser. Quelques siècles plus tard, Galilée arguait que l'idée d'un infini actuel (d'un *tout* infini) est paradoxale dans la mesure où elle viole l'axiome euclidien du « tout et de la partie », un argument également présent chez Leibniz. Quel est alors, dans cette perspective, le sens de cet infini actuel dans la métaphysique et la mathématique leibnizienne ? Nous le verrons, Leibniz défend l'idée d'un infini actuel *syncatégorématique* (actuel mais non-déterminé) tout en niant l'existence de tous infinis, d'infiniment grands et d'infiniment petits.

En niant au sein de sa métaphysique l'existence des infinitésimaux, des infiniment grands et des tous infinis, Leibniz rencontre une difficulté en ce qui a trait à la pratique du mathématicien dans la mesure où il suggère qu'en calculant la somme d'une série convergente<sup>4</sup>, le mathématicien doit supposer qu'elle est, en un certain sens, complétée et bornée. Les opérations

arithmétiques sur les suites infinies ainsi que celles d'augmentation et de réduction au sein du calcul infinitésimal impliqueraient donc un engagement ontologique envers les infiniment grands et petits, les tous infinis puis les nombres infinis. Or, que le mathématicien puisse concevoir les séries infinies comme des totalités en acte – et qu'il ait effectivement de tels ensembles infinis à sa disposition – est précisément la chose niée par Leibniz. Y aurait-il incohérence entre les affirmations du mathématicien d'une part, et celles du philosophe d'autre part ? La réalité est que Leibniz a résisté à établir une correspondance stricte entre les deux domaines, insistant ainsi sur l'autonomie « opératoire » de son calcul dans la mesure où celui-ci est un exemplaire de sa caractéristique universelle. Cependant, il ne va pas jusqu'à dénier son calcul d'une signification philosophique et d'une importance pratique : ce qu'il évacue avant tout c'est une interprétation de celui-ci qui « réaliserait » les infinitésimaux et les infinis en les posant comme des « choses »<sup>5</sup>. Pour ce qui est du problème concernant l'engagement ontologique que suppose la pratique du mathématicien qui utilise le calcul infinitésimal, nous croyons pouvoir affirmer, avec un brin d'anachronisme somme toute explicatif, que Leibniz endosse, en philosophie des mathématiques, une certaine forme de fictionnalisme au sens où Hartry Field (1980 ; 1989) l'a défendu : bien que nos énoncés mathématiques aient la prétention d'être à propos d'objets abstraits, ces derniers n'existent pas réellement et, suivant cela, on ne peut pas dire de nos énoncés qu'ils soient vrais. Les objets mathématiques sont des « fictions utiles » qui participent de l'idéal et non pas de l'actuel.

L'analyse commencera ici par l'articulation des liens entre le continu, la matière, la nature et les monades, ce qui permettra de clarifier le statut de l'infini actuel. Pour mieux comprendre ce dernier, nous mettrons en évidence, dans la troisième section, les raisons qui lui font rejeter l'idée d'un nombre et d'un tout infini. L'attention sera ensuite dirigée vers les problèmes que pose la mathématique leibnizienne. On abordera d'abord, dans la quatrième section, le problème des infinis dans les séries convergentes pour finalement exposer, dans la cinquième section, les motivations qui lui font admettre une séparation partielle entre les analyses mathématiques et les considérations métaphysiques.

## 2. *L'infini actuel et le labyrinthe du continu*

L'infini se dit premièrement et principalement de Dieu, soit d'un Être qui doit être incapable de limites, et ce, de manière constitutive. En effet, Dieu ne saurait être borné ou limité car quelque chose lui ferait alors défaut. De cela il s'ensuit, selon Leibniz, qu'Il est absolument parfait, « la perfection n'étant autre chose que la grandeur de la réalité positive prise précisément, en mettant à part les limites ou bornes dans les choses qui en ont. Et là, où il n'y a point de bornes, c'est-à-dire en Dieu, la perfection est absolument infinie<sup>6</sup> ». En ce sens, nous avons là affaire à un infini qui est d'ordre *qualitatif* car nous sommes dans l'absolu et donc hors du domaine de la quantité qui suppose des parties, ce qu'il illustre ailleurs en notant que « le vrai infini à la rigueur n'est que dans l'absolu, qui est antérieur à toute composition, et n'est point formé par l'addition des parties<sup>7</sup> ».

Alors que pour un Descartes l'infini se dit de Dieu et non du monde, qui est quant à lui indéfini, le meilleur des mondes possibles, le nôtre, est, pour Leibniz, infini au sens où il contient une infinité de « créatures », et cela se comprend aisément car pour lui la création divine ne peut être qu'infinie. Dans un premier temps, l'infinité actuelle de l'univers se rencontre dans le fait que chaque portion de la matière est *actuellement divisée* à l'infinie : « je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée, et par conséquent la moindre parcelle doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes<sup>8</sup> ». Cette thèse leibnizienne s'explique par le fait qu'il admet en sa physique une loi de la continuité : « rien ne se fait d'un coup, et c'est une de mes maximes les plus vérifiées que la nature ne fait jamais des sauts : ce que j'appelais la loi de la continuité<sup>9</sup> ». Étant régie par cette loi, la nature se présente à nous comme une entité continue, un *continuum*, c'est-à-dire que chaque partie que l'on retiendra en contiendra toujours d'autres. L'explication est

probante : « il y a une infinité de créatures dans la moindre parcelle de la matière, à cause de la division actuelle du *continuum* à l'infini<sup>10</sup> ». En termes contemporains, on peut exemplifier cela en rappelant que la plupart des constantes physiques (gravitationnelle, masse, vitesse, etc.), liées en grande partie au *mouvement*, peuvent être modélisées par les nombres réels (rationnel ou irrationnel<sup>11</sup> ; algébrique ou transcendant), ces derniers nous permettant donc de mesurer des quantités *continues* présentes dans la nature. Les nombres réels peuvent être conceptualisés en tant que points sur une droite *infinie* (aucun élément minimum et maximum) :



La droite des réels est un *continuum* (*linéaire*), c'est-à-dire que (1) pour tout élément  $x$  et tout élément  $y$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $x < y$ , il existe un troisième élément  $z$  entre  $x$  et  $y$  ( $x < z < y$ ), et (2) il n'existe aucun « trou » dans la droite (elle est *continue*, ce qui renvoie à l'idée de Leibniz selon laquelle la nature ne fait aucun *saut*) au sens où tout ensemble non vide  $S$  de  $\mathbb{R}$  possède la propriété de la borne supérieure, nous assurant que toute séquence décimale infinie a pour limite un nombre réel<sup>12</sup>. Ainsi, dans la mesure où la nature, selon Leibniz, obéit à la loi de la continuité, ce qui fait qu'elle peut être abordée en tant que *continuum*, chaque partie de la nature peut être dite, en un certain sens, actuellement divisée à l'infini. Or Leibniz croit également que le continu ne peut pas être envisagé comme ayant *en acte* des parties (infinies) au préalable, c'est-à-dire que l'on ne peut le concevoir comme un ensemble (un tout) ayant en acte des parties infinies (formellement)<sup>13</sup>. Plus précisément, Leibniz rejette l'idée d'un infini *catégorématique* : un tout infini ayant en acte des parties infinies formellement qui seraient *discrètes* (distinctes et séparées), ce qui permettrait le *dénombrément*. Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, somme toute semblables à celles invoquées par Aristote et Galilée, cette idée d'un tout infini est contradictoire aux yeux de Leibniz. Mais alors, en quel sens pouvons nous dire de la matière qu'elle est *actuellement* divisée à l'infini ? La réponse de Leibniz à cette question se traduit par l'introduction d'une position théorique supplémentaire : l'infini qu'il défend est actuel mais *syncatégorématique*. Suivant ici l'usage des logiciens médiévaux, la juxtaposition de « syncatégorématique » à « infini » est pour Leibniz un moyen de signifier que par l'utilisation du terme « infini » il ne fait pas référence à quelque chose de *déterminé*. L'infini actuel est ici une multitude infinie non dénombrable qui ne peut être exprimée *collectivement*, c'est-à-dire en faisant référence à une totalité et son nombre infini de parties<sup>14</sup>.

Nous touchons ici au *labyrinthe du continu* en ce qui a trait au rapport du tout aux parties dans le domaine de l'infini. Il faut d'abord rappeler que la source de certains de nos embarras face au continu vient de ce que nous concevons la matière et les corps comme des substances alors qu'ils sont des agrégats – des tous – et qu'ils ne peuvent donc prétendre à ce titre. En effet, pour Leibniz, l'un et l'être sont des notions interchangeable (réciproques), c'est-à-dire que les entités réellement existantes d'un point de vue ontologique (les substances) sont des unités, des entités *simples*. Chaque partie de la matière (chaque corps) doit être considérée comme actuellement divisée en d'autres parties, chaque corps étant donc l'agrégat des parties en lesquelles il est divisé. Si nous partons de ces prémisses, alors nous pouvons conclure que chaque corps est actuellement divisé à l'infini : par application récursive du fait que chaque corps est l'agrégat de ses parties, il s'ensuit que chacune de ces parties sont elles-mêmes l'agrégat d'autres parties et ainsi de suite, à l'infini<sup>15</sup>. Chaque partie d'un corps est une partie d'une partie ou une partie d'une partie d'une partie, etc. En principe, il nous est possible d'atteindre chacune d'entre elles par l'application successive d'opérations mathématiques, bien qu'il n'y ait aucune partie si petite qu'elle ne puisse être divisée plus en avant. Le finitiste et le constructiviste pourraient ici remettre en question la *faisabilité* de ces processus : dans la mesure où nos capacités cognitives sont limitées, comment peut-on fonder de telles opérations dans le domaine de l'*infini* ? Or, pour Leibniz, l'atteinte d'une partie d'un corps actuellement divisé à l'infini n'est pas un processus

*temporel* : c'est le *mouvement* de la matière qui est responsable des divisions, et celui-ci est conçu comme un mouvement *instantané*. En nous permettant de mesurer le continu, de calculer *d'un seul coup* la somme d'une série infinie, d'une différentielle ou d'une intégrale, le calcul infinitésimal leibnizien nous permet d'atteindre les parties de la matière en mouvement. Nous y reviendrons plus loin.

Leibniz parle de l'infini actuel syncatégorématique comme d'une « puissance passive ayant des parties<sup>16</sup> ». Or, rappelons-le, cette infinité de parties ne peut être comprise comme un tout susceptible d'une détermination numérique. Il n'en reste pas moins que chaque partie de la matière est actuellement divisée à l'infini au sens déjà spécifié : toutes les opérations mathématiques pouvant être effectuées nous feront passer d'une partie à une autre sans jamais que l'on ne rencontre de *minima*<sup>17</sup>, car il y a plus de parties que n'importe quel nombre fini – bien qu'il n'y ait pas de totalité formée par celles-ci. Pour expliquer cette particularité du continuum et de la matière, Leibniz introduira sa métaphore du pli, qui sera renouvelée jusqu'en sa *Monadologie* :

La division du continu ne doit pas être considérée comme celle du sable en grains, mais comme celle d'une feuille de papier ou d'une tunique en plis, de telle façon qu'il puisse y avoir une infinité de plis, les uns plus petits que les autres, sans que le corps se dissolve jamais en points ou minima<sup>18</sup>.

Dans ce contexte, la *Monadologie* répond à un problème précis par l'introduction de ces entités métaphysiques que sont les monades<sup>19</sup>. En effet, dans la mesure où la matière est actuellement divisée à l'infini ne s'ensuit-il pas qu'aucune partie de celle-ci ne puisse prétendre à l'un ou à l'être ? C'est donc que les substances doivent être de nature immatérielle. C'est la monade, cette unité substantielle simple et sans étendue, qui remplit ce rôle et qui vient ainsi *fonder* le monde des phénomènes. La monade est un point de vue sur l'univers, qu'elle représente en entier ; une chose qu'elle accomplit pourtant avec « limitations », comme nous le rappelle Leibniz : « Elles vont toutes confusément à l'infini, au tout, mais elles sont limitées et distinguées par les degrés de perceptions distinctes<sup>20</sup> ». Dans chacune d'entre elles, l'univers est « plié » en totalité, d'une manière spécifique qui lui est unique suivant son propre point de vue.

L'infinité actuelle de l'univers peut donc être abordée de deux manières : (1) soit on la considère sous l'angle de la matière, qui « n'est pas seulement divisible à l'infini [...] mais encore sous-divisée actuellement sans fin, chaque partie en parties [...] ». Par où l'on voit qu'il y a un monde de créatures, de vivants, d'animaux [...] dans la moindre portion de la matière<sup>21</sup> » ; (2) soit on la considère sous l'angle des monades, et nous avons alors affaire à la « multitude infinie des substances simples<sup>22</sup> ». Et ces deux *angles* ne correspondent pas à deux infinités différentes, car cette matière infiniment divisible « contient » la multitude infinie des monades. Plus rigoureusement, c'est la réalité des unités substantielles (les monades) qui fonde la « réalité » apparente des phénomènes (mouvement de la matière, durée etc.)<sup>23</sup>. La multitude infinie des monades nous *apparaît* sous un mode phénoménal qui est celui de la matière et de l'étendue.

Pour Leibniz, le *labyrinthe* du continu résulte essentiellement de ce que nous confondons la nature du continu avec celle de la matière<sup>24</sup>, soit en supposant que la matière est continue ou en supposant que le continuum est composé de parties discrètes, qu'il est un infini catégorématique. Certes, la matière peut être abordée en tant que continuum, ce qu'entérine le calcul infinitésimal, mais elle s'en distingue dans la mesure où elle est composée des parties simples et discrètes – bien qu'immatérielles – que sont les monades. Et à l'inverse, la pratique du mathématicien suppose un continuum complété, un tout infini dont les parties seraient discrètes et dénombrables. En définitive, nous dit Leibniz<sup>25</sup>, le labyrinthe du continu consiste à confondre deux ordres, l'idéal et l'actuel, le rapport du tout aux parties dans le premier étant opposé à celui du second : le premier renvoie aux structures abstraites tels les objets mathématiques, le deuxième à la matière et aux substances. Dans l'ordre de l'*idéal*, dont participe le continu, le tout est antérieur aux

parties. Dans l'ordre de l'*actuel*, les parties – ici les monades – sont antérieures au tout. En ce sens, l'ordre de l'idéal renvoie à l'ordre de l'actuel. Toutefois, et c'est là la particularité du « syncatégorématique » dans la doctrine de Leibniz, si le continu doit être envisagé comme une entité idéale qui ne peut prétendre à l'être, l'infinité des monades ne peut également pas être comprise comme un tout infini :

L'univers, lequel, se devant étendre par toute l'éternité future, est un infini. [...] Il y a une infinité de créatures dans la moindre parcelle de la matière, à cause de la division actuelle du *continuum* à l'infini. Et l'infini, c'est-à-dire l'amas d'un nombre infini de substances, à proprement parler, n'est pas un tout ; non plus que le nombre infini lui-même [...] <sup>26</sup>.

Cet « amas d'un nombre infini de substances » ne peut être « totalisé » : nous avons affaire à une multitude infinie d'êtres – les unités substantielles que sont les monades – qui constituent en quelque sorte une « suite » *illimitée* qui ne se laisse pas dénombrer. L'infinité actuelle de l'univers est donc incommensurable au sens où elle n'est pas susceptible d'une détermination numérique. D'un côté, nous avons une structure mathématique *idéale* (le continuum), et de l'autre, dans l'ordre de l'actuel, une multitude infinie *inépuisable* de parties simples (les substances) dont l'amas ne forme pas un tout. Et si Leibniz refuse que l'infini puisse être un tout, ce n'est pas tant pour distinguer l'infinité de l'univers de l'infinité divine – les identifier, comme l'a fait un Spinoza, aurait été pour lui une hérésie – que pour éviter le paradoxe qui affecte l'idée d'un (tout) infini dénombrable – et avec elle celle d'un nombre infini.

### 3. Le tout infini et le nombre infini

Pour bien comprendre les raisons qui mènent Leibniz à rejeter l'idée d'un tout infini et d'un nombre infini, il convient de rappeler très brièvement sa conception du nombre. Le nombre s'applique à un tout, à une totalité composée d'unités. Plus précisément, le nombre « 5 », par exemple, est l'agrégat de cinq unités, soit un tout composé de cinq parties :  $5 = 1+1+1+1+1$ . Ainsi, un nombre infini s'appliquerait à un tout infini. On peut distinguer au moins trois sens à l'idée d'un nombre infini chez Leibniz : (1) le nombre des nombres dans la séquence des entiers naturels « 1, 2, 3 ... » (*numerus omnium unitatum*) ; (2) le nombre de tous les nombres (*numerus numerorum omnium*) ; (3) le plus grand nombre (*numerus maximus*) <sup>27</sup>.

Selon Leibniz, les trois formulations sont logiquement inconsistantes. Les deux premières violent tout simplement l'*axiome euclidien* qui stipule que « le tout est plus grand que la partie », lequel est considéré par Leibniz comme devant conserver une application universelle <sup>28</sup>. Si l'on admet, suivant (1) – et le même raisonnement s'étend à (2) –, que le nombre infini s'applique à un tout infini constitué par l'ensemble des entiers naturels, on peut jumeler chaque entier avec son carré obtenant ainsi un autre tout infini auquel s'applique toujours le même nombre infini. Or le tout infini constitué par les carrés est une partie du tout infini constitué par les entiers naturels, ce qui viole l'axiome euclidien et la notion commune de grandeur qui lui est associée. C'est le paradoxe mis en évidence par Galilée, que l'on peut préciser de la manière suivante : si le nombre d'éléments d'un ensemble nous fournit une mesure de sa grandeur (sa cardinalité), alors un ensemble *B* sera plus grand qu'un ensemble *A* s'il y a une bijection de *A* sur une partie *C* de *B*, c'est-à-dire si chacun des éléments de *A* correspond à un élément (et un seul) d'une partie *C* de l'ensemble *B*. Or, si l'on décide de parler de la *totalité* infinie des entiers naturels (*N*) et non pas seulement de la suite potentiellement infinie des entiers naturels, il s'ensuit que la *totalité* infinie des carrés (*E*) peut être mise en bijection avec la totalité des entiers naturels, ce qui viole le 8<sup>ème</sup> axiome d'Euclide car *E* est une partie de *N* <sup>29</sup>. Plus encore, le nombre d'éléments de *E* correspond à un nombre infini (la cardinalité de *E*) et ce dernier s'applique également au nombre d'éléments de *N* puisqu'il y a bijection de *E* sur *N*. Mais ne devrait-il pas être « inférieur » dans le cas de *E* puisque l'ensemble des carrés est un sous-ensemble de *N* ? Leibniz voit en cela l'impossibilité d'un nombre infini car il serait alors égal et inégal, s'appliquant également au tout et à la partie.

La notion d'un nombre infini implique donc contradiction, tout comme ce à quoi elle s'applique, un tout infini, un infini catégorématique<sup>30</sup>. Pour la troisième interprétation, il suffit de se poser la question suivante : « Comment compare-t-on le plus grand nombre avec son double ? »

Ces considérations exposent bien les raisons pour lesquelles, dans un cadre euclidien, l'idée d'un infini catégorématique est paradoxale. Leibniz se range donc du côté d'Aristote sur la question de l'infini actuel dans le domaine de la quantité : aucun ensemble infini, que ce soit l'ensemble des réels (le continu) ou l'ensemble des entiers naturels, ne nous est actuellement donné au sens où il serait une *totalité déterminée*. Penser un tout en tant que totalité composée de parties infinies en acte implique contradiction. D'ailleurs, on retrouve chez Leibniz l'idée d'une progression illimitée dans la suite des nombres : « Et pour parler avec précision, au lieu d'un nombre infini il faut dire qu'il y en a plus qu'on ne peut exprimer par aucun [...] »<sup>31</sup>. Toutefois, il serait erroné d'y voir une prise de position en faveur de l'infini potentiel car Leibniz distingue entre deux infinis actuels, l'infini catégorématique, qui correspond à l'infini actuel d'un Aristote, et l'infini syncatégorématique, qui se rapporte à l'actuel sans toutefois être quelque chose de déterminé, de borné. C'est ce dernier qu'il endosse. Bref, Leibniz a clamé haut et fort son adhésion à l'infini actuel, bien qu'on ne puisse concevoir ce dernier sans contradiction dans le domaine de la quantité.

Quel est alors exactement le statut de l'infini actuel ? Car si l'on sait que l'infini syncatégorématique nous est donné, on sait également que l'infini se dit de Dieu. Leibniz nous offre un résumé pour le moins éclairant :

Il y a l'infini syncatégorématique, ou puissance passive ayant des parties, à savoir la possibilité d'un développement ultérieur par division, multiplication, soustraction, addition [...]. Mais il n'y a pas d'infini catégorématique, c'est-à-dire ayant en acte des parties infinies formellement [...]. Il y a aussi l'infini hypercatégorématique, ou potestatif, puissance active ayant des quasi-parties, éminemment, mais non formellement ni en acte. Cet infini est Dieu lui-même<sup>32</sup>.

Nous aurions donc deux idées vraies (non contradictoires) de l'infini actuel : la première est celle de l'infini (hypercatégorématique) en tant que « vrai infini à la rigueur<sup>33</sup> », c'est-à-dire l'absolu, la perfection, et donc Dieu lui-même ; la deuxième concerne l'infinité (syncatégorématique) des choses (des créatures) qui est inépuisable au sens où elle n'est pas dénombrable. Le véritable infini, Dieu, est qualitatif puisque la perfection est qualité, mais l'infinité syncatégorématique actuelle des créatures n'en est pas moins réelle car elle est en quelque sorte le reflet de l'infinité divine<sup>34</sup>. Dans la mesure où les infinis et les infinitésimaux leibniziens ne sont respectivement pas des tous et des grandeurs, il semble que l'infinité actuelle de la nature soit essentiellement *qualitative*.

#### 4. Les séries convergentes et l'infini

Une des difficultés fondamentales dans l'histoire des mathématiques, que le calcul leibnizien contribuera à éclairer, consiste en la mise en rapport du nombre, une entité discrète et discontinue, avec la grandeur, une réalité continue. Comment passer de l'un à l'autre, de la contiguïté à la continuité, et vice-versa ? Leibniz y verra une première formulation de ce qu'il nomme le « labyrinthe du continu » : comment résoudre une grandeur continue en un ensemble d'éléments constituants et, à l'inverse, comment obtenir une grandeur continue à partir d'un ensemble déterminé d'éléments ? Cela revient à se demander, en définitive, de quelle manière nous pouvons représenter les nombres irrationnels, dont le développement décimal est infini non-périodique, et s'il est possible de le faire à l'aide de nombres rationnels. La réponse à la question demande, selon Leibniz, quelques réflexions sur l'infini.

Cette difficulté se retrouve entre autres dans les problèmes de « quadratures », où il est question de nombrer l'aire d'une figure. C'est le cas, par exemple, du problème qui est soulevé

par la quadrature du cercle : les courbes du cercle, que Leibniz nomme « transcendentes », semblent rendre impossible une solution quelconque pour la détermination de l'aire. Archimède avait déjà tenté de fournir une solution géométrique au problème de la quadrature du cercle, mais sa méthode d'exhaustion ne fournissait qu'une approximation de la mesure en question. Plus encore, la « révolution algébrique » en géométrie, largement initié par un Descartes, n'y fournit pas de solution : certains problèmes, et en l'occurrence certaines courbes (celles que Leibniz nomment « transcendentes »), ne se laissent pas exprimer par un polynôme de type  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ <sup>35</sup>. Le projet de Leibniz sera double : fonder une méthode générale d'analyse (1) qui puisse aborder les courbes transcendentes et donc dépasser la méthode cartésienne, et (2) qui nous fournisse une règle unique (un algorithme) pour la résolution de tous les problèmes de l'analytique transcendente<sup>36</sup>.

La solution que propose Leibniz est d'ordre arithmétique, ce qui permet d'éliminer l'utilisation des figures et de s'extraire en quelque sorte de l'intuition géométrique. En 1672, Leibniz développe sa « méthode des différences », qu'il appliquera bientôt aux séries convergentes (alternées) infinies, ce qui permettra le développement, un peu plus tard, fin 1673, d'une solution au problème de la quadrature du cercle : le ratio entre l'aire d'un cercle et celle d'un carré dont le côté équivaut au diamètre du cercle est le même que le ratio entre 1 et la somme de la série convergente alternée :  $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \text{ad infinitum}$ <sup>37</sup>. Bien que la série se poursuive à l'infini, Leibniz affirme l'exactitude de la solution : l'égalité entre  $\pi/4$  et la série est justement possible parce que cette dernière est infinie ; prendre un nombre fini de termes ne nous fournirait qu'un résultat approché et donc approximatif<sup>38</sup>. Ici, l'idée maîtresse de Leibniz est qu'un nombre irrationnel peut être représenté par une suite infinie de nombres rationnels qui converge vers celui-ci. Une figure qui possède une aire finie, en l'occurrence celle du cercle, se voit donc égaler à une suite infinie de termes.

Cette égalité est problématique à plusieurs égards. Le plus frappant est peut-être de remarquer que, selon Leibniz « [i]l appartient à l'essence du nombre, de la ligne, et d'un tout quelconque, d'être borné<sup>39</sup> », et donc que l'on ne peut opérer sur une quantité que dans la mesure où celle-ci est « bornée ». En ce sens, obtenir une mesure pour la série infinie implique qu'elle soit « bornée », ce qu'admet également Leibniz. Or comment comprendre cette suite « infinie et bornée » si ce n'est en tant qu'elle suppose un tout infini, que nous disposions actuellement d'ensembles infinis ? Plus encore, elle suppose l'existence d'un dernier terme ou, plus précisément, que nous quantifions sur un dernier terme qui serait d'une quantité *infinitésimale* dans notre cas. La difficulté conceptuelle est importante : la série infinie étant une suite consécutive bien organisée, on peut assigner un nombre ordinal à chaque terme. Mais alors, dans ce cas, quel nombre ordinal assignera-t-on au dernier terme<sup>40</sup> ? On voit mal comment il serait possible d'atteindre ce dernier terme, qui serait une sorte de nombre infini, puisque, la série étant infinie, nous pourrions sans cesse progresser un peu plus à l'avant...

Nous avons déjà observé que Leibniz refuse les notions d'un nombre infini et d'un tout infini sous prétexte qu'elles sont contradictoires. Il refuse également que l'on pose les infinitésimaux comme des grandeurs actuellement existantes : « Il est vrai que chez moi, les infinis ne sont pas des tous et les infiniment petits ne sont pas des grandeurs. Ma métaphysique les bannit de ses terres<sup>41</sup> ». Dans cette perspective, comment concevoir le rapport entre ces déclarations et les engagements ontologiques qu'implique sa pratique mathématique autrement que comme une certaine forme d'incohérence ? La question est d'ordre rhétorique, mais la difficulté est réelle. Leibniz est bien évidemment conscient du conflit qui subsiste entre son calcul et ses autres déclarations, et c'est pourquoi il s'interroge sur le statut de  $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \text{etc.} = \pi/4$  :

We must still investigate whether, and to what extent, the following is true, namely that the square is to the circle as  $1$  to  $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \text{etc.}$  For when we say « etc. » or « to infinity », the last number is not really understood to be the greatest number, for there isn't one, but it is still understood to be infinite. But as the series is not bounded, how can this be the case ? For something must be added, even if it is assumed to be an infinite number, so that it must be said that this [equation] is not rigorously true<sup>42</sup>.

Bien que, pour les besoins de la mesure, nous devons assumer que la série infinie est bornée et donc qu'il y a un dernier terme infini, il reste qu'elle n'est pas *réellement* bornée. Il s'ensuit donc que l'on s'engage dans une certaine fiction en la supposant comme telle, et en admettant ainsi un dernier terme qui serait infini. Ailleurs, il abonde exactement dans ce sens : « Pour dire le vrai, je ne suis pas trop persuadé moi-même, qu'il faut considérer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses idéales ou des fictions bien fondées<sup>43</sup> ». Suivant cela, on ne peut pas dire de l'équation qu'elle est (rigoureusement) vraie. On peut extraire de ces remarques une certaine forme de fictionnalisme chez Leibniz : bien que les équations mathématiques dont il parle aient la prétention de référer à des (nombres et tous) infinis et des infiniment petits, ces objets n'existent pas réellement et, suivant cela, on ne peut pas dire de ces équations qu'elles sont vraies. En posant ces objets mathématiques comme des « choses idéales » ou des « fictions bien fondées », Leibniz évite la tension entre ses déclarations métaphysiques et son calcul, établissant ainsi une séparation partielle entre sa métaphysique et sa mathématique.

##### 5. Le calcul infinitésimal et la caractéristique universelle

Au moment où Leibniz propose la solution au problème de la quadrature que nous venons d'examiner, fin 1673, il n'a pas encore rempli le deuxième objectif de son projet, qui consiste en la découverte d'un algorithme permettant de s'attaquer à tous les problèmes de l'analytique transcendante, ce qu'il fera en l'année 1675, qui marque du même coup la création de ce qu'il nommera son calcul infinitésimal<sup>44</sup>. Les mêmes problèmes qui affligeaient ses séries convergentes sont encore présents, mais le nouveau symbolisme ( $dx$ ,  $\int dx$ , etc.) qui vient avec l'inauguration du calcul infinitésimal fournit un appui considérable pour montrer son importance malgré les difficultés « fondationnelles » qui peuvent subsister : on attend toujours un « fondement » métaphysique à l'idée d'une suite « infinie et bornée ». En effet, avec l'algorithme intégral et différentiel, trouver des quadratures (par exemple) revient à entreprendre une simple procédure *mécanique* – l'algorithme est *une méthode de décision* qui nous permet, en un *nombre fini d'étapes*, d'obtenir le résultat – qui consiste en un calcul sur des différentielles. Ayant alors rencontré le double objectif de son projet, Leibniz insistera à juste titre, pour justifier l'intérêt et l'importance de sa découverte, sur la généralité, la systématité et la simplicité de sa méthode<sup>45</sup>.

Le projet double que nous avons relevé chez Leibniz va de pair avec son désir de dépasser l'algèbre cartésienne, mais il s'inscrit plus directement et prend même racine dans ce qu'il désignait comme l'art d'inventer ou la combinatoire, qui finit par se confondre avec sa caractéristique. L'invention du calcul infinitésimal n'est qu'une partie de son ambitieux projet d'une caractéristique universelle<sup>46</sup>, et c'est précisément en tant qu'échantillon de sa caractéristique que le « calcul de l'infini » obtient une certaine autonomie « opératoire », au sens où les opérations qu'il déploie n'ont pas à être discréditées par des considérations métaphysiques. Avant de critiquer Leibniz sur la manière dont il aurait fermé les yeux devant des questions de fondements pour son calcul, il faut comprendre ce qu'implique l'innovation symbolique.

Vers sa dix-huitième année, Leibniz formule l'idée d'une classification des jugements. Il croit alors que toutes les vérités peuvent être décomposées en un petit nombre de vérités simples qui entrent dans la composition des premières, et que ces vérités simples peuvent être à leur tour décomposées en un petit nombre d'idées simples qui soient primitives et indéfinissables. L'ensemble de ces idées (concepts) simples formerait alors les éléments de toute pensée, et il serait donc possible d'obtenir, par leurs combinaisons, toutes les idées (concepts) complexes. Ce



projet reste au cœur de son *De Arte Combinatoria*, qui présente cet art de la combinaison comme un art d'inventer : en effet, dès lors que l'on possède l'ensemble des idées simples, il suffit de les combiner de différentes manières pour retrouver toutes les vérités qui expriment leurs relations, ce qui aura inévitablement l'effet d'en produire de nouvelles. Leibniz conçoit la décomposition des concepts suivant une analogie avec la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Le nombre « 210 » par exemple, peut s'exprimer par autant de produits différents que  $42 \times 5$ ,  $6 \times 35$ ,  $14 \times 15$ , mais sa décomposition en facteurs premiers est dans tout les cas la même, à savoir  $2 \times 3 \times 5 \times 7$ . En ce sens, bien qu'un concept d'un certain ordre puisse avoir plusieurs expressions différentes, soit qu'il y ait différentes combinaisons de signes qui puissent l'exprimer, sa décomposition en éléments simples ne s'effectue que d'une seule manière. L'influence de l'arithmétique sur son projet ira jusqu'à lui faire adopter, à un moment donné, les nombres premiers comme symboles ou signes des idées simples, et il proposera, suivant cela, par exemple, que l'on exprime l'égalité logique Homme = animal  $\times$  raisonnable par l'égalité arithmétique  $6 = 2 \times 3$ , où l'on représente animal par « 2 », raisonnable par « 3 », et Homme par « 6 ». Mais le projet ne s'arrête pas là, car il faut attribuer un signe ou un symbole à chacune de ces idées simples.

Ce projet de recherche qui consiste à remplacer tous les concepts par des signes et les propositions par des relations entre ces signes est l'objet de sa caractéristique universelle. Une bonne caractéristique possède les qualités suivantes : (1) les caractères doivent être maniables et le système de symboles concis, de manière à abrégier et condenser le travail de l'esprit ; (2) les caractères doivent représenter les idées simples et les combinaisons des idées complexes de la manière la plus « naturelle » possible, de sorte que soient « figurées » à la pensée les connexions logiques entre les idées qu'ils représentent<sup>47</sup>.

On voit alors pourquoi le calcul infinitésimal ne serait qu'un échantillon particulièrement réussi de la caractéristique universelle. La mise en branle d'un symbolisme nouveau et d'ordre plus général puis d'un algorithme qui assure dans tous les cas la conséquence du raisonnement y participe directement. Celui qui calcule suivant la méthode leibnizienne n'a pas besoin de se rapporter constamment, comme on le faisait avant lui, à des figures et des définitions explicites qui alourdisent le travail surtout lorsque les concepts impliqués sont complexes. Plutôt que d'opérer et de penser directement à partir des idées et des définitions, qui entravent une pensée d'ailleurs limitée par les faibles capacités de l'esprit, le calcul leibnizien permet de remplacer cette analyse logique des concepts par une *analyse matérielle* des caractères<sup>48</sup>. Avec des signes bien définis et des règles de calcul invariables et inflexibles, les erreurs de jugements apparaîtront comme des simples erreurs de calcul. C'est pourquoi, en plus d'être un art d'inventer, Leibniz voit en l'infailibilité de la caractéristique un *juge des controverses*, puisque pour résoudre un problème, les opposants n'auront qu'à s'exclamer : « *Calcuemus !* »

## 6. Conclusion

Dans cette perspective, il n'est pas étonnant que Leibniz ait défendu l'importance de son calcul malgré l'absence de « fondement » métaphysique à l'idée d'une suite « infinie et bornée », et cela va de pair avec la remarque suivant laquelle « on n'a pas besoin de faire dépendre les analyses mathématiques des controverses métaphysiques<sup>49</sup> ». Avec un spécimen de la caractéristique comme celui que représente le calcul infinitésimal, on est assuré d'avoir en main une méthode rigoureuse et inventive qui élargit le pouvoir de la pensée en montrant comment un symbolisme bien choisi peut, par la force des raisons, nous amener à reconsidérer quelque chose comme la définition (intuitive) de l'égalité :

Tout le mérite des sciences abstraites repose sur les marques abrégées de la parole et de l'écriture, et ces marques font, que nous pouvons calculer le terme et la somme d'une progression quelconque tout d'un coup, quoique nous ne parcourions pas tous les termes un à

un ; que nous pouvons montrer un terme fini égal à l'infini lui-même et d'autres choses de ce genre qui frappent d'étonnement ceux qui ne comprennent pas la raison des choses<sup>50</sup>.

En effet, les analyses mathématiques leibniziennes nous montrent par exemple que l'on peut évaluer l'aire finie d'un cercle à une série infinie de nombres rationnels. Que cela puisse étonner ne change en rien l'importance et la pertinence du calcul : il faut justement éviter la mise en image d'une série infinie, la tentation d'y voir une entité ontologique, de la « réaliser », pour ainsi comprendre que l'on a affaire à un concept de nature *idéale* qui tire sa « raison d'être » du mouvement propre de l'analyse, et que c'est donc *aux yeux de l'esprit* que s'adresse la « vérité » des opérations du calcul infinitésimal<sup>51</sup>. C'est là tout le mérite des sciences abstraites telles l'analyse et l'algèbre.

La signification et l'importance métaphysiques du calcul infinitésimal tiennent essentiellement au fait qu'il corrobore en quelque sorte la loi de la continuité, une des « maximes » philosophiques les plus chères à Leibniz. Bien que les (touts) infinis et les infinitésimaux participent de l'ordre de l'idéal, on voit clairement qu'ils tirent leur « réalité » et leur importance du fait qu'ils permettent l'analyse des courbes transcendantes en géométrie et des quantités continues présentes dans la nature. C'est le sens de cette remarque :

On peut dire de même, que les infinis et infiniment petits sont tellement fondés que tout se fait dans la Géométrie, et même dans la nature, comme si c'étaient des parfaites réalités, témoins non seulement notre Analyse géométrique des Transcendantes, mais encore ma loi de la continuité [...]<sup>52</sup>.

Des choses idéales, certes, mais également des fictions dites « bien fondées », le fondement de celles-ci résidant dans leurs capacités à rendre compte de certains aspects essentiels de la géométrie et de la nature, tel le fait qu'elle se présente à nous comme un *continuum*. Les opérations qui ont lieu au sein du calcul infinitésimal prennent « racine » dans l'infinité actuelle de la nature.

---

<sup>1</sup> Alexandre Koyré, *Du Monde Clos à l'Univers Infini*, traduit de l'anglais par Raissa Tarr, Paris, Gallimard, 1973.

<sup>2</sup> G.W. Leibniz, *Nouvelles Lettres et Opuscules Inédits de Leibniz*, éd. Foucher de Careil, Paris, Durand, 1857, p. 121

<sup>3</sup> Voir Henry Mendell, « Aristotle and Mathematics », *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2008 Edition) [En ligne], Edward N. Zalta (ed.), <http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/aristotle-mathematics>

<sup>4</sup> Une série convergente est une série infinie qui a une somme finie. Si  $|x| < 1$ , la série infinie  $1 + x + x^2 + x^3 \dots$  est convergente et sa somme est  $1 / (1 - x)$ .

<sup>5</sup> Frank Burbage et Nathalie Chouchan, *Leibniz et l'Infini*, PUF, Paris, 1993, p. 100.

<sup>6</sup> G.W. Leibniz, *Principes de la Nature et de la grâce, Monadologie et autres textes*, éd. Christiane Fermont, Flammarion, Paris, 1996, p. 251.

<sup>7</sup> G.W. Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, éd. Brunschwig, Flammarion, Paris, 1993, p. 132.

<sup>8</sup> G.W. Leibniz, *Nouvelles Lettres et Opuscules Inédits de Leibniz*, éd. Foucher de Careil, Paris, Durand, 1857, p. 121.

<sup>9</sup> G.W. Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, p. 5.

<sup>10</sup> G.W. Leibniz, *Essais de Théodicée*, Garnier-Flammarion, Paris, pp. 233-234.

<sup>11</sup> Un nombre réel est irrationnel s'il ne peut être exprimé par un ratio  $a/b$ , où  $a$  et  $b$  sont des entiers relatifs. Depuis l'argument de la diagonale de Cantor (1891), nous savons que l'ensemble des nombres réels est non dénombrable (alors que l'ensemble des rationnels l'est), et donc que la majorité des nombres réels sont irrationnels.

<sup>12</sup> Cette propriété distingue l'ensemble des nombres rationnels ( $\mathbb{Q}$ ) de l'ensemble des réels.

- 
- <sup>13</sup> Lettre à des Bosses (1706). Extrait cité à partir de Jean Seidengart, *Dieu, l'univers et la sphère infinie*, Albin Michel, Paris, 2006, p. 488.
- <sup>14</sup> Voir R. Arthur, *Leibniz and Cantor on the actual infinite*, [En ligne], <http://www.humanities.mcmaster.ca/~rarthur/papers/LeibCant.pdf>
- <sup>15</sup> *Ibid.*, p. 3.
- <sup>16</sup> Lettre à des Bosses (1706). Extrait cité à partir de Jean Seidengart, *op. cit.*, p. 488.
- <sup>17</sup> Les minima (pluriel de minimum) sont les plus petits éléments d'un ensemble, ici ceux de l'ensemble des nombres réels.
- <sup>18</sup> G.W. Leibniz, *Opusculs et Fragments inédits de Leibniz*, éd. Couturat, Olms, 1961, p. 615.
- <sup>19</sup> S. Levey, « Leibniz on Mathematics and the Actually Infinite Division of Matter », *The Philosophical Review*, Vol. 107 (No.1), 1998, p. 46.
- <sup>20</sup> G.W. Leibniz, *Principes de la Nature et de la Grâce, Monadologie et autres textes*, p. 255 (§60).
- <sup>21</sup> *Ibid.*, *Principes de la Nature et de la Grâce, Monadologie et autres textes*, p. 257 (§65).
- <sup>22</sup> *Ibid.*, p. 254.
- <sup>23</sup> Burbage et Chouchan, *op. cit.*, p. 32.
- <sup>24</sup> Voir G.W. Leibniz, *Leibniz Philosophischen Schriften*, éd. Gerhardt, réed. Olms, Vol. II, 1962, p. 282.
- <sup>25</sup> *Ibid.*, p. 282.
- <sup>26</sup> G.W. Leibniz, *Essais de Théodicée*, pp. 233-234.
- <sup>27</sup> Nicolas Rescher, « Leibniz' Conception of Quantity, Number, and Infinity », dans *Philosophical Review*, vol. 64, no. 1 (1965), p. 111.
- <sup>28</sup> Pour la discussion de Leibniz sur ces points voir G.W. Leibniz, *Leibniz Mathematische Schriften*, éd. Gerhardt, réed. Olms, Vol. III, 1962.
- <sup>29</sup> Françoise Monnoyeur, (éd.) *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*, Belin, Paris, 1982, p. 7.
- <sup>30</sup> La conclusion de Galilée est différente en ce qu'elle consiste à éviter le paradoxe en réservant les attributs de grandeurs impliquées dans l'axiome euclidien aux quantités finies. Voir Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, traduction par Maurice Clavelin, Paris, PUF, 1995, p. 31.
- <sup>31</sup> Lettre à des Bosses (1706). Extrait cité à partir de Burbage et Chouchan, *op. cit.*, p. 71.
- <sup>32</sup> Lettre à des Bosses (1706). Extrait cité à partir de Seidengart, Jean, *op. cit.*, p. 488.
- <sup>33</sup> G.W. Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, p. 132.
- <sup>34</sup> Yvon Belaval, *Leibniz : Initiation à sa Philosophie*, Vrin, Paris, 1962, p. 93.
- <sup>35</sup> C'est là la définition d'un nombre transcendant : il ne peut pas être exprimé par la racine d'une équation polynomiale.  $\pi$  en est un exemple. Tous les nombres transcendants sont irrationnels.
- <sup>36</sup> Yvon Belaval, *op. cit.*, p. 88.
- <sup>37</sup> S. Levey, *loc. cit.*, p. 79.
- <sup>38</sup> Burbage et Chouchan, *op. cit.*, p. 82.
- <sup>39</sup> Lettre à des Bosses (1706). Extrait cité à partir de Burbage et Chouchan, *op. cit.*, p. 71.
- <sup>40</sup> S. Levey, *loc. cit.*, p. 74.
- <sup>41</sup> G.W. Leibniz, *Nouvelles Lettres et Opusculs Inédits de Leibniz*, éd. Foucher de Careil, Paris, Durand, 1857, p. 233.
- <sup>42</sup> G.W. Leibniz, *Samtliche Schriften und Briefe. Philosophische Schriften*, Berlin : Akademie-Verlag, series 6, vol. 3, 1923-80, p. 502. Cité à partir d'une traduction libre de S. Levey, *loc. cit.*, pp. 79-80.
- <sup>43</sup> G.W. Leibniz, *Leibniz Mathematische Schriften*, éd. Gerhardt, réed. Olms, Vol. IV, 1962, p. 110.
- <sup>44</sup> Yvon Belaval, *op. cit.*, p. 90.
- <sup>45</sup> Burbage et Chouchan, *op. cit.*, p. 84.
- <sup>46</sup> Louis Couturat, *La Logique de Leibniz*, Hildesheim, Olms, 1961, p. 85.
- <sup>47</sup> *Ibid.*, pp. 87-88.
- <sup>48</sup> *Ibid.*, p. 90.
- <sup>49</sup> G.W. Leibniz, *Leibniz Mathematische Schriften*, p. 110.
- <sup>50</sup> G.W. Leibniz, *Opusculs et Fragments inédits de Leibniz*, éd. Couturat, Olms, 1961, p. 257.
- <sup>51</sup> Burbage et Chouchan, *op. cit.*, p. 94.
- <sup>52</sup> G.W. Leibniz, *Leibniz Mathematische Schriften*, p. 93.